

Тренировочная олимпиада 1

1. **Приведённый** квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два положительных корня, а среди корней многочлена $f(f(x))$ есть два отрицательных. Докажите, что оба корня трёхчлена $f(x)$ меньше 1.
2. На окружности с диаметром AB выбрана точка C . Через середину меньшей дуги AC и середину отрезка BC проведена прямая ℓ , вторично пересекающая окружность в точке K . Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке L . Докажите, что $KL \perp \ell$.
3. Неправильная пчела и Винни-Пух играют в игру на бесконечной правильной шестиугольной решётке в виде сот. Изначально все шестиугольники пустые, начинает пчела. За один ход пчела заливает неправильным мёдом два соседних пустых шестиугольника, а за свой ход Винни-Пух выедает весь неправильный мёд из любого залитого шестиугольника. Какое максимальное количество залитых шестиугольников подряд в одну линию после некоторого своего хода может гарантировано получить пчела?
4. Последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел определена условиями
 - $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$.
 - При всех целых $k \geq 0$ выполнено $a_{k+6}a_{k+1} = a_{k+5}a_{k+2} + a_{k+4}a_{k+3}$.

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.