

1. Есть доска 100×100 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
2. Есть таблица 8×8 , изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату 3×3 или 4×4 . Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?
3. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.
4. Пусть A_1, \dots, A_m — различные непустые подмножества n -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leq n$.
5. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Более того, каждый из них посещает четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могут ходить во дворец пионеров?
6. Имеется n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключен к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключенных к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечетного числа из этих лампочек. Докажите, что если изначально все лампочки не горели, то в конце их все можно включить.
7. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.
8. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходу?

1. Есть доска 100×100 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
2. Есть таблица 8×8 , изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату 3×3 или 4×4 . Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?
3. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.
4. Пусть A_1, \dots, A_m — различные непустые подмножества n -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leq n$.
5. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Более того, каждый из них посещает четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могут ходить во дворец пионеров?
6. Имеется n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключен к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключенных к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечетного числа из этих лампочек. Докажите, что если изначально все лампочки не горели, то в конце их все можно включить.
7. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.
8. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходу?