IMO 2019	Линейная алгебра в комбинаторике - 2	28 сентября 2018

1. Рассмотрим граф G, выделим в нём вершины u и v. На каждом ребре e введём положительное сопротивление $r(e)$. Рассмотрим единичный поток в сети с истоком u и стоком v (считаем, что у каждого ребра пропускная способность 1 в обе стороны, между несмежными вершинами пропускная способность равна 0). В дополнение к обычным условиям на поток, потребуем ещё одно **правило Кирхгофа:** *для любого цикла с рёбрами* $e_1, \ldots a_n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot r(e_k) = 0.$$

(a) Докажите, что существует единственный поток, удовлетворяющий данным условиям.

(b) * Выразите поток на ребре e_k через сопротивления.

2. Многочлен xyz представили как сумму кубов линейных ондородных многочленов. Каким наименьшим количеством кубов смогли обойтись?

3. На ребрах полного графа на 128 вершинах записали числа. За один ход разрешается разбить вершины графа на два множества и узнать сумму чисел на ребрах, соединяющих вершины из разных множеств.

(a) Как за 127 вопросов можно узнать сумму чисел на всех ребрах графа?

(b) * Докажите, что за 126 вопросов ее узнать не получится.

4. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите, что отношение сторон прямоугольника рационально.

5. Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

IMO 2019	Линейная алгебра в комбинаторике - 2	28 сентября 2018

1. Рассмотрим граф G, выделим в нём вершины u и v. На каждом ребре e введём положительное сопротивление $r(e)$. Рассмотрим единичный поток в сети с истоком u и стоком v (считаем, что у каждого ребра пропускная способность 1 в обе стороны, между несмежными вершинами пропускная способность равна 0). В дополнение к обычным условиям на поток, потребуем ещё одно **правило Кирхгофа:** *для любого цикла с рёбрами* $e_1, \ldots a_n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot r(e_k) = 0.$$

(a) Докажите, что существует единственный поток, удовлетворяющий данным условиям.

(b) * Выразите поток на ребре e_k через сопротивления.

2. Многочлен xyz представили как сумму кубов линейных ондородных многочленов. Каким наименьшим количеством кубов смогли обойтись?

3. На ребрах полного графа на 128 вершинах записали числа. За один ход разрешается разбить вершины графа на два множества и узнать сумму чисел на ребрах, соединяющих вершины из разных множеств.

(a) Как за 127 вопросов можно узнать сумму чисел на всех ребрах графа?

(b) * Докажите, что за 126 вопросов ее узнать не получится.

4. Прямоугольник разрезан на квадраты. Докажите, что отношение сторон прямоугольника рационально.

5. Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.